Лекция 3 Числовая последовательность, её предел.

Тлеулесова А.М.

1) *Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.*

2) *Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности, их свойства.*

3) *Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерии сходимости последовательности.*

Типы числовых последовательностей

Определение.

1) Если $x_{n+1} > x_n$ для всех n, то последовательность **возрастающая.**

2) Если $x_{n+1} \geq x_n$ для всех n, то последовательность **неубывающая**.

3) Если $x_{n+1} < x_n$ для всех n, то последовательность **убывающая.**

4) Если $x_{n+1} \leq x_n$ для всех n, то последовательность **невозрастающая.**

Теорема (критерий Коши). *Числовая последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится (в R, т.е. - к конечному пределу)* $\Leftrightarrow$ *она фундаментальная* $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathrm{N}: \quad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall p \in \mathrm{N} \ \Rightarrow \ \left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon .$$

Пример 1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} .$$

ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение:

Если даны натуральные числа

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots,$$

то последовательность

$$x_{n_k}$$

называется **подпоследовательностью** исходной последовательности (x_n).

То есть подпоследовательность — это выбор элементов исходной последовательности **в порядке возрастания индексов**, без перестановки.

Примеры:

- x_{2k} — подпоследовательность чётных членов
- x_{2k-1} — подпоследовательность нечётных

Определение 1.

Если частичная последовательность (x_{n_k}) сходится, то её предел называется **частичным пределом** последовательности (x_n).

Определение 2.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **предельной точкой** числовой последовательности (x_n), если **любая** её окрестность содержит **бесконечное число** членов последовательности.

То есть:

$$a \text{ — предельная точка} \iff \forall \varepsilon > 0: \text{ множество } \{\, n : |x_n - a| < \varepsilon \,\} \text{ бесконечно.}$$

ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ

Для ограниченной последовательности:

- **Верхний частичный предел (lim sup):**

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

- **Нижний частичный предел (lim inf):**

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

Свойства:

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

- Все частичные пределы лежат между ними.
- Если

$$\liminf x_n = \limsup x_n = L,$$

то последовательность **сходится** к L.

Свойства

1.

$$\underline{\lim}\, x_n \;\le\; \overline{\lim}\, x_n.$$

2.

$$\underline{\lim}(x_n + y_n) \;\ge\; \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n, \qquad \overline{\lim}(x_n + y_n) \;\le\; \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n.$$

3.

$$\underline{\lim}(x_n y_n) \;\ge\; (\underline{\lim} x_n)(\underline{\lim} y_n), \qquad \overline{\lim}(x_n y_n) \;\le\; (\overline{\lim} x_n)(\overline{\lim} y_n).$$

4. Если $x_n \ge 0,\; y_n \ge 0$, то формулы из пункта (3) сохраняются.

5. Если существует обычный предел

$$\lim x_n = L,$$

то:

Сумма:

$$\underline{\lim}(x_n + y_n) = L + \underline{\lim} y_n, \qquad \overline{\lim}(x_n + y_n) = L + \overline{\lim} y_n.$$

Произведение (при $x_n \ge 0$):

$$\underline{\lim}(x_n y_n) = L \cdot \underline{\lim} y_n, \qquad \overline{\lim}(x_n y_n) = L \cdot \overline{\lim} y_n.$$

<u>Пример 2.</u> Найти верхний и нижний пределы последовательности $x_n = \frac{2n-1}{n+1}\sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathrm{N}.$

Решение. Первый сомножитель $\frac{2n-1}{n+1}$ - числовая последовательность, сходящаяся к 2.

Рассмотрим значения второго сомножителя при различных значениях n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8…
$\sin\frac{\pi n}{2}$	1	0	-1	0	1	0	-1	0…

Пример 3. Найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\underline{\lim} x_n$, $\overline{\lim} x_n$ для последовательности

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \ (n = 1,2,\ldots) \ .$$

Решение.

$\frac{n(n-1)}{2}$: 0,1,3,6,10,15,…. $\Rightarrow$ $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$: 1, -1,-1,1,1,-1,… $\Rightarrow$ период повтора =4

$(-1)^{n+1}$: 1,-1,1,-1,… $\Rightarrow$ период повтора =2

Общий период повтора:4.

1) $n = 4k - 3, \ \Rightarrow \ x_{4k-3} = 1 + 2 + 3 = 6 \xrightarrow[k\to\infty]{} 6,$

2) $n = 4k - 2, \ \Rightarrow \ x_{4k-2} = 1 - 2 - 3 = -4 \xrightarrow[k\to\infty]{} -4,$

3) $n = 4k - 1, \ \Rightarrow \ x_{4k-1} = 1 + 2 - 3 = 0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$

4) $n = 4k, \ \Rightarrow \ x_{4k} = 1 - 2 + 3 = 2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 2,$

$Lim\ x_n = \{-4,0,2,6\}$, $\quad \inf x_n = -4, \quad \sup x_n = 6, \quad \underline{\lim} x_n = -4, \quad \overline{\lim}\, x_n = 6$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Иными словами, у всякой ограниченной последовательности есть по меньшей мере один конечный частичный предел.

Теорема. Равенство $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ является необходимым и достаточным условием существования (конечного или бесконечного) предела последовательности $\{x_n\}$.